Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2018, Extraordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$, **se pide:**

a) **Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro** α.
b) **Para** $\alpha = 0$, **calcular, si es posible,** A^{-1}.
c) **Resolver, si es posible, el sistema** $AX = B$ **en el caso** $\alpha = 1$.

Solución:

a) **Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro** α.

El rango de una matriz cuadrada A de orden 3 es 3 si su determinante es distinto de cero. Calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{vmatrix} = 14(7(5\alpha) - 5(4)) - 0 + 10(0(4) - 7(3)) = 14(35\alpha - 20) + 10(-21)$$
$$= 490\alpha - 280 - 210 = 490\alpha - 490$$

Igualamos el determinante a cero para encontrar los valores críticos de α:

$$|A| = 490\alpha - 490 = 0 \implies 490\alpha = 490 \implies \alpha = 1.$$

Caso 1: Si $\alpha \neq 1$. En este caso, $|A| = 490(\alpha - 1) \neq 0$. Como el determinante es distinto de cero, el rango de la matriz A es 3.

$$\text{Rg}(A) = 3.$$

Caso 2: Si $\alpha = 1$. En este caso, $|A| = 0$. El rango debe ser menor que 3. Buscamos un menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 14 \times 7 - 0 = 98 \neq 0.$$

Como existe un menor de orden 2 no nulo, el rango de la matriz A es 2.

$$\text{Rg}(A) = 2.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Si } \alpha \neq 1 : \textbf{Rg}(A) = 3 \\ \textbf{Si } \alpha = 1 : \textbf{Rg}(A) = 2 \end{array}}$$

b) **Para** $\alpha = 0$, **calcular, si es posible,** A^{-1}.

Para $\alpha = 0$, estamos en el Caso 1 ($\alpha \neq 1$), por lo que $|A| \neq 0$ y la matriz A tiene inversa. Calculamos el determinante para $\alpha = 0$:

$$|A| = 490(0) - 490 = -490.$$

La matriz para $\alpha = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Calculamos la matriz adjunta:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 14 & 10 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 14 & 10 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -(-15) & -21 \\ -(-40) & -30 & -56 \\ -70 & -(70) & 98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 15 & -21 \\ 40 & -30 & -56 \\ -70 & -70 & 98 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la traspuesta de la adjunta:

$$(\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -20 & 40 & -70 \\ 15 & -30 & -70 \\ -21 & -56 & 98 \end{pmatrix}.$$

La inversa es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t$:

$$A^{-1} = \frac{1}{-490}\begin{pmatrix} -20 & 40 & -70 \\ 15 & -30 & -70 \\ -21 & -56 & 98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/490 & -40/490 & 70/490 \\ -15/490 & 30/490 & 70/490 \\ 21/490 & 56/490 & -98/490 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/49 & -4/49 & 1/7 \\ -3/98 & 3/49 & 1/7 \\ 3/70 & 4/35 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

(Simplificando las fracciones).

$$\boxed{\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/49 & -4/49 & 1/7 \\ -3/98 & 3/49 & 1/7 \\ 3/70 & 4/35 & -1/5 \end{pmatrix}}}$$

c) Resolver, si es posible, el sistema $\boldsymbol{AX = B}$ en el caso $\boldsymbol{\alpha = 1}$.

Para $\alpha = 1$, estamos en el Caso 2, donde $|A| = 0$ y $\mathrm{Rg}(A) = 2$. El sistema es $AX = B$. La matriz ampliada $(A|B)$ es:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 3 & 4 & 5 & 11 \end{array}\right)$$

Para determinar si el sistema es compatible, necesitamos calcular el rango de la matriz ampliada. Tomemos un menor 3x3 que incluya la columna de términos independientes, para ver si el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} 14 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 37/2 \\ 3 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 14(7(11) - (37/2)4) - 0 + 2(0(4) - 7(3))$$

$$= 14(77 - 37 \cdot 2) + 2(-21) = 14(77 - 74) - 42 = 14(3) - 42 = 42 - 42 = 0.$$

Como el único menor de orden 3 relevante es nulo, $\mathrm{Rg}(A|B) = 2$.
Dado que $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|B) = 2 < 3$ (nº de incógnitas), el sistema es Compatible Indeterminado (S.C.I.) con $3 - 2 = 1$ grado de libertad.

Resolvemos el sistema usando las dos primeras filas (cuyo menor de orden 2 es no nulo) y tomando una variable como parámetro. Sea $z = \lambda$.

$$\begin{cases} 14x + 10z = 2 \\ 7y + 5z = 37/2 \end{cases}$$

De la primera ecuación: $14x = 2 - 10\lambda \implies x = \frac{2-10\lambda}{14} = \frac{1-5\lambda}{7}$.
De la segunda ecuación: $7y = 37/2 - 5\lambda \implies y = \frac{37/2-5\lambda}{7} = \frac{37-10\lambda}{14}$.

$$\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{\alpha = 1} \textbf{ (S.C.I.), la solución es: } \begin{cases} \boldsymbol{x = (1 - 5\lambda)/7} \\ \boldsymbol{y = (37 - 10\lambda)/14} \\ \boldsymbol{z = \lambda} \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})}$$

Ejercicio 2. Opción A. Análisis

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \frac{x^3-4x}{x-2} & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$ **y se pide:**

a) **Estudiar la continuidad de f en** $x = 2$.
b) **Calcular las asíntotas horizontales de** $f(x)$. **¿Hay alguna asíntota vertical?**
c) **Calcular** $\int_0^2 f(x)dx$.

Solución:

a) **Estudiar la continuidad de f en** $x = 2$.

Para que f sea continua en $x = 2$, deben existir y ser iguales $f(2)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.
– Valor de la función: $f(2) = 8e^{2(2)-4} = 8e^{4-4} = 8e^0 = 8 \times 1 = 8$.
– Límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 8e^{2x-4} = 8e^{2(2)-4} = 8e^0 = 8.$$

– Límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-4x}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2}$$

Como $x \to 2^+$, $x \neq 2$, podemos simplificar el factor $(x-2)$:

$$= \lim_{x\to 2^+} x(x+2) = 2(2+2) = 2(4) = 8.$$

Dado que $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 8$, la función es continua en $x = 2$.

$$\boxed{\textbf{La función } f(x) \textbf{ es continua en } x = 2.}$$

b) **Calcular las asíntotas horizontales de** $f(x)$. **¿Hay alguna asíntota vertical?**

Asíntotas Horizontales: Calculamos los límites cuando $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 8e^{2x-4} = 8e^{-\infty} = 8 \times 0 = 0.$$

Hay una asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-4x}{x-2} = \lim_{x\to +\infty} x(x+2) = +\infty.$$

No hay asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.
Asíntotas Verticales: Estudiamos los puntos donde la función podría tender a infinito.
Para $x \leq 2$, $f(x) = 8e^{2x-4}$ es una exponencial, continua y sin asíntotas verticales.
Para $x > 2$, $f(x) = \frac{x^3-4x}{x-2} = \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2}$. El denominador se anula en $x = 2$, pero este punto no está en el dominio de esta rama ($x > 2$).
Al simplificar, $f(x) = x(x+2)$ para $x > 2$ y $x \neq 2$. Esta expresión es un polinomio para $x > 2$, por lo que no tiene asíntotas verticales en su dominio.
No hay asíntotas verticales.

$$\boxed{\textbf{Asíntota horizontal: } y = 0 \textbf{ (cuando } x \to -\infty\textbf{). No hay asíntotas verticales.}}$$

c) Calcular $\int_0^2 f(x)dx$.

En el intervalo $[0, 2]$, la función es $f(x) = 8e^{2x-4}$. Calculamos la integral definida:

$$\int_0^2 8e^{2x-4}dx = 8\int_0^2 e^{2x-4}dx$$

La integral de e^{ax+b} es $\frac{1}{a}e^{ax+b}$. Aquí $a = 2$.

$$= 8\left[\frac{1}{2}e^{2x-4}\right]_0^2 = 4\left[e^{2x-4}\right]_0^2$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$= 4(e^{2(2)-4} - e^{2(0)-4}) = 4(e^0 - e^{-4}) = 4(1 - e^{-4}).$$

$$\boxed{\int_0^2 f(x)dx = 4(1 - e^{-4})}$$

Ejercicio 3. Opción A. Geometría

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ y el punto $A(-4, 4, 7)$. Se pide:

a) **Determinar un vector $\vec{w_1}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.**

b) **Hallar un vector no nulo $\vec{w_2}$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.**

c) **Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\vec{OA}$.**

Solución:

a) **Determinar un vector $\vec{w_1}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.**

Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es su producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2-0) - \vec{j}(1-6) + \vec{k}(0-4) = (-2, 5, -4).$$

Sea $\vec{p} = (-2, 5, -4)$. Este vector es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Para que sea unitario, lo dividimos por su módulo:

$$|\vec{p}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Un vector unitario y ortogonal es $\vec{p}_u = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2, 5, -4) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$.

Racionalizando: $\vec{p}_u = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{5\sqrt{5}}{15}, -\frac{4\sqrt{5}}{15}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)$.

Este vector $\vec{p}_u$ tiene la tercera coordenada $-\frac{4\sqrt{5}}{15}$, que es negativa. Por lo tanto, $\vec{w_1} = \vec{p}_u$.

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{w_1} = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{5\sqrt{5}}{15}, -\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)}}$$

b) **Hallar un vector no nulo $\vec{w_2}$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.**

Un vector $\vec{w_2}$ combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tiene la forma $\vec{w_2} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ para algunos escalares λ, μ.

$$\vec{w_2} = \lambda(-1, 2, 3) + \mu(2, 0, -1) = (-\lambda + 2\mu, 2\lambda, 3\lambda - \mu).$$

Debe ser ortogonal a $\vec{v} = (2, 0, -1)$, lo que significa que su producto escalar es cero: $\vec{w_2} \cdot \vec{v} = 0$.

$$(-\lambda + 2\mu, 2\lambda, 3\lambda - \mu) \cdot (2, 0, -1) = 0$$

$$2(-\lambda + 2\mu) + 0(2\lambda) + (-1)(3\lambda - \mu) = 0$$

$$-2\lambda + 4\mu - 3\lambda + \mu = 0$$

$$-5\lambda + 5\mu = 0 \implies 5\mu = 5\lambda \implies \mu = \lambda.$$

El vector $\vec{w_2}$ es de la forma:

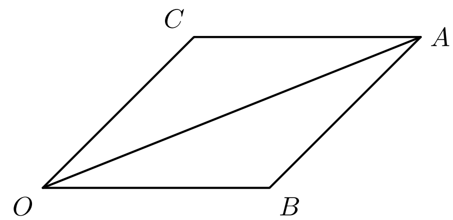
$$\vec{w_2} = (-\lambda + 2\lambda, 2\lambda, 3\lambda - \lambda) = (\lambda, 2\lambda, 2\lambda) = \lambda(1, 2, 2).$$

Como se pide un vector no nulo, podemos elegir cualquier $\lambda \neq 0$. Por ejemplo, con $\lambda = 1$.

$$\vec{w_2} = (1, 2, 2).$$

$$\boxed{\vec{w_2} = (1, 2, 2) \text{ (o cualquier múltiplo no nulo)}}$$

c) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\vec{OA}$.



Sea el paralelogramo $OBAC'$ con origen O(0,0,0).
Los lados son $\vec{OB}$ (en dirección $\vec{u}$ o $\vec{v}$) y $\vec{OC'}$ (en dirección del otro vector).
Las diagonales son $\vec{OC'} + \vec{OB}$ y $\vec{OC'} - \vec{OB}$.
Los lados del paralelogramo son $k\vec{u}$ y $m\vec{v}$ para algunos escalares k, m, y la diagonal es $\vec{OA} = k\vec{u} + m\vec{v}$.

$$(-4, 4, 7) = k(-1, 2, 3) + m(2, 0, -1)$$

$$(-4, 4, 7) = (-k + 2m, 2k, 3k - m)$$

Igualando componentes:

$$\begin{cases} -k + 2m = -4 \\ 2k = 4 \\ 3k - m = 7 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $k = 2$.
Sustituyendo $k = 2$ en la primera: $-(2) + 2m = -4 \implies 2m = -2 \implies m = -1$.
Comprobamos en la tercera ecuación: $3(2) - (-1) = 6 + 1 = 7$. Se cumple.
Los lados del paralelogramo son $2\vec{u} = (-2, 4, 6)$ y $(-1)\vec{v} = (-2, 0, 1)$.
Los vértices del paralelogramo, partiendo del origen $O(0, 0, 0)$, son: $O = (0, 0, 0)$.
$V_1 = O + 2\vec{u} = (0, 0, 0) + (-2, 4, 6) = (-2, 4, 6)$.
$V_2 = O - \vec{v} = (0, 0, 0) + (-2, 0, 1) = (-2, 0, 1)$. (Usamos $-\vec{v}$ como lado)
$A = O + 2\vec{u} - \vec{v} = (-2, 4, 6) + (-2, 0, 1) = (-4, 4, 7)$. (Diagonal $\vec{OA}$)
Los vértices son $O(0, 0, 0)$, $V_1(-2, 4, 6)$, $A(-4, 4, 7)$ y $V_2(-2, 0, 1)$.

$$\boxed{\textbf{Los vértices son } O(0,0,0), B(-2,4,6), C(-2,0,1), A(-4,4,7).}$$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad

Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13.8% de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43% de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?**

b) **Cierto test diagnostica correctamente el 96% de los casos positivos de diabetes, pero da un 2% de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?**

Solución:

Definimos los sucesos:

D = "Ser diabético" $\Longrightarrow$ $P(D) = 0.138$.

$\overline{D}$ = "No ser diabético" $\Longrightarrow$ $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.138 = 0.862$.

S = "Saber que tiene diabetes"

$\overline{S}$ = "No saber que tiene diabetes"

Datos del enunciado: $P(\overline{S}|D) = 0.43$ (Probabilidad de no saberlo, sabiendo que es diabético).

$P(S|D) = 1 - P(\overline{S}|D) = 1 - 0.43 = 0.57$ (Probabilidad de saberlo, sabiendo que es diabético).

Si no es diabético, no puede saber que lo es (asumimos que no hay error en este sentido), así que $P(S|\overline{D}) = 0$ y $P(\overline{S}|\overline{D}) = 1$.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?**

Probabilidad de ser diabético y saberlo: $P(D \cap S)$.
Usamos la definición de probabilidad condicionada: $P(S|D) = \frac{P(D \cap S)}{P(D)}$.

$$P(D \cap S) = P(S|D) \times P(D) = 0.57 \times 0.138 = 0.07867.$$

Probabilidad de no ser diabético o no saber que lo es: $P(\overline{D} \cup \overline{S})$. Usamos la ley de Morgan: $\overline{D} \cup \overline{S} = \overline{D \cap S}$.

$$P(\overline{D} \cup \overline{S}) = P(\overline{D \cap S}) = 1 - P(D \cap S) = 1 - 0.0787 = 0.9213.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(Diabtico\ y\ Sabe) = 0.07866}. \quad \boldsymbol{P(No\ Diabtico\ o\ No\ Sabe) = 0.92134}.}$$

b) **Cierto test diagnostica correctamente el 96% de los casos positivos de diabetes, pero da un 2% de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?**

Definimos el suceso T = "Dar positivo en el test".
Datos del test: $P(T|D) = 0.96$ (Sensibilidad: probabilidad de positivo si es diabético).
$P(T|\overline{D}) = 0.02$ (Probabilidad de falso positivo: positivo si no es diabético).
$P(\overline{T}|D) = 1 - 0.96 = 0.04$ (Falso negativo).
$P(\overline{T}|\overline{D}) = 1 - 0.02 = 0.98$ (Especificidad: negativo si no es diabético).
Se pide calcular $P(D|T)$, la probabilidad de ser diabético sabiendo que ha dado positivo. Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T)}$$

Necesitamos calcular $P(T)$ usando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(T) = P(T|D)P(D) + P(T|\overline{D})P(\overline{D})$$

$$P(T) = (0.96)(0.138) + (0.02)(0.862)$$

$$P(T) = 0.1324 + 0.0172 = 0.1497$$

Ahora aplicamos Bayes:

$$P(D|T) = \frac{(0.96)(0.138)}{0.1497} = \frac{0.1324}{0.1497} \approx 0.8849.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(D|T) \approx 0.8849}}$$

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Solución:

Obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Sean x, y, z el número de días que han estado en Francia, Alemania y Suiza, respectivamente.

1. **Duración total del viaje:**
$$x + y + z = 15$$

2. **Relación días Francia-Suiza:** Han estado en Francia el doble de días que en Suiza.
$$x = 2z$$

3. **Gasto total del viaje:** El gasto diario por persona es la suma del gasto en hotel, comida y transporte.

- Gasto diario en Francia: $20(hotel) + 20(comida) + 8(transporte) = 48$ euros/día.
- Gasto diario en Alemania: $25(hotel) + 15(comida) + 8(transporte) = 48$ euros/día.
- Gasto diario en Suiza: $30(hotel) + 25(comida) + 8(transporte) = 63$ euros/día.

El gasto total es la suma de los gastos en cada país:

$$48x + 48y + 63z = 765$$

Tenemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ x = 2z \\ 48x + 48y + 63z = 765 \end{cases}$$

Sustituimos $x = 2z$ en la primera y tercera ecuación:

$$\begin{cases} (2z) + y + z = 15 \\ 48(2z) + 48y + 63z = 765 \end{cases} \implies \begin{cases} y + 3z = 15 \\ 96z + 48y + 63z = 765 \end{cases} \implies \begin{cases} y + 3z = 15 \\ 48y + 159z = 765 \end{cases}$$

Ahora tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (y, z). De la primera ecuación: $y = 15 - 3z$. Sustituimos en la segunda:

$$48(15 - 3z) + 159z = 765$$

$$720 - 144z + 159z = 765$$

$$15z = 765 - 720$$

$$15z = 45 \implies z = \frac{45}{15} = 3.$$

Ahora encontramos y y x:

$$y = 15 - 3z = 15 - 3(3) = 15 - 9 = 6.$$

$$x = 2z = 2(3) = 6.$$

Los días son $x = 6$ (Francia), $y = 6$ (Alemania), $z = 3$ (Suiza).

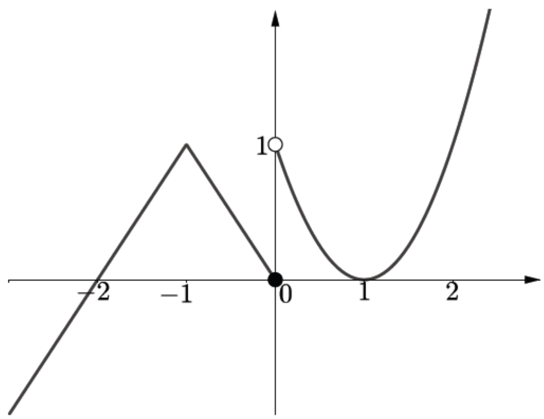
Comprobación: $x + y + z = 6 + 6 + 3 = 15$.

Gasto: $48(6) + 48(6) + 63(3) = 288 + 288 + 189 = 765$.

Han estado 6 días en Francia, 6 días en Alemania y 3 días en Suiza.

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. Usando la información de la figura, se pide:



a) **Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.**
b) **Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.**
c) **Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.**
d) **Determinar el valor de $\int_{-2}^{0} f(x)dx$.**

Solución:

a) **Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.**

Mirando la gráfica:
- $f(-1)$: El valor de la función en $x = -1$ es el punto más alto del pico, que está en $y = 1$. $f(-1) = 1$.
- $f'(1)$: La derivada en $x = 1$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. La gráfica muestra un mínimo en $x = 1$, donde la tangente es horizontal. Por lo tanto, la pendiente es 0. $f'(1) = 0$.

$$\boxed{f(-1) = 1, \quad f'(1) = 0}$$

b) **Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.**

Continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$$

$$f(-1) = 1$$

Como los límites laterales existen, son iguales y coinciden con el valor de la función, f es continua en $x = -1$.

Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{(el límite se acerca al punto hueco)}$$

$$f(0) = 0 \quad \text{(el punto relleno está en y=0)}$$

Como los límites laterales son distintos ($\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$), la función no es continua en $x = 0$. Presenta una discontinuidad de salto finito.

$$\boxed{\textbf{f es continua en } \boldsymbol{x = -1}\textbf{. f NO es continua en } \boldsymbol{x = 0}.}$$

c) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $\boldsymbol{x = -1}$ y $\boldsymbol{x = 0}$.

Derivabilidad en $x = -1$: La gráfica presenta un pico (un punto anguloso) en $x = -1$. Las pendientes de las rectas tangentes por la izquierda y por la derecha son distintas (la de la izquierda es positiva, la de la derecha es negativa). Por lo tanto, la función no es derivable en $x = -1$.

Derivabilidad en $x = 0$: Una función no puede ser derivable en un punto si no es continua en él. Como f no es continua en $x = 0$ (según el apartado b), tampoco es derivable en $x = 0$.

$$\boxed{\textbf{f NO es derivable en } \boldsymbol{x = -1} \textbf{ (pico). f NO es derivable en } \boldsymbol{x = 0} \textbf{ (no continua).}}$$

d) Determinar el valor de $\boldsymbol{\int_{-2}^{0} f(x)dx}$.

La integral definida $\int_{-2}^{0} f(x)dx$ representa el área geométrica bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = -2$ y $x = 0$.
En el intervalo $[-2, -1]$, $f(x)$ es una recta que pasa por $(-2, 0)$ y $(-1, 1)$.
La pendiente es $(1 - 0)/(-1 - (-2)) = 1/1 = 1$.
La ecuación es $y - 0 = 1(x - (-2)) \implies y = x + 2$.

En el intervalo $[-1, 0]$, $f(x)$ es una recta que pasa por $(-1, 1)$ y $(0, 0)$.
La pendiente es $(0 - 1)/(0 - (-1)) = -1/1 = -1$.
La ecuación es $y - 0 = -1(x - 0) \implies y = -x$.

El área es la suma de las áreas de dos triángulos:
- Triángulo 1 (base $[-2, -1]$, altura 1): Área $= \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.
- Triángulo 2 (base $[-1, 0]$, altura 1): Área $= \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

El valor de la integral es la suma de estas áreas (ya que la función es no negativa en $[-2, 0]$):

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \text{Área}_1 + \text{Área}_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\boxed{\boldsymbol{\int_{-2}^{0} f(x)dx = 1}}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

Dados el punto $P(0,-1,1)$ y la recta r, que pasa por el punto $Q(1,0,1)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(0,1,2)$, se pide:

a) **Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P.**
b) **Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\vec{SP}$ sea perpendicular a la recta r.**
c) **Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.**

Solución:

a) **Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P.**

El plano π está determinado por el punto $Q(1,0,1)$ de la recta, el vector director de la recta $\vec{v}=(0,1,2)$, y el vector $\vec{QP}=P-Q=(0-1,-1-0,1-1)=(-1,-1,0)$.
Comprobamos que $\vec{v}$ y $\vec{QP}$ no son paralelos: $\frac{0}{-1}\neq\frac{1}{-1}$. Son linealmente independientes.
La ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-x_Q & y-y_Q & z-z_Q \\ v_x & v_y & v_z \\ QP_x & QP_y & QP_z \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)(1(0)-2(-1))-y(0(0)-2(-1))+(z-1)(0(-1)-1(-1))=0$$

$$(x-1)(2)-y(2)+(z-1)(1)=0$$

$$2x-2-2y+z-1=0$$

$$2x-2y+z-3=0$$

$$\boxed{\pi\equiv 2x-2y+z-3=0}$$

b) **Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\vec{SP}$ sea perpendicular a la recta r.**

El punto S, al estar en la recta r, tiene coordenadas $S(1,\lambda,1+2\lambda)$ para algún $\lambda\in\mathbb{R}$ (usando la ecuación paramétrica de r: $(1,0,1)+\lambda(0,1,2)$).
El vector $\vec{SP}=P-S=(0-1,-1-\lambda,1-(1+2\lambda))=(-1,-1-\lambda,-2\lambda)$.
La condición es que $\vec{SP}$ sea perpendicular a r, lo que significa que $\vec{SP}$ es perpendicular al vector director de r, $\vec{v}=(0,1,2)$.
Su producto escalar debe ser cero: $\vec{SP}\cdot\vec{v}=0$.

$$(-1,-1-\lambda,-2\lambda)\cdot(0,1,2)=0$$

$$-1(0)+(-1-\lambda)(1)+(-2\lambda)(2)=0$$

$$0-1-\lambda-4\lambda=0$$

$$-1-5\lambda=0 \implies 5\lambda=-1 \implies \lambda=-1/5.$$

Sustituimos $\lambda=-1/5$ en las coordenadas de S:

$$S=(1,-1/5,1+2(-1/5))=(1,-1/5,1-2/5)=(1,-1/5,3/5).$$

Este punto S es la proyección ortogonal de P sobre r.

$$\boxed{\textbf{El punto es } \boldsymbol{S(1,-1/5,3/5)}.}$$

c) **Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.**

Los puntos T_1, T_2 están en la recta r, por lo que $T(1,\lambda,1+2\lambda)$.
La distancia de P a T es $d(P,T)=\sqrt{5}$. $d(P,T)^2=5$.
El vector $\vec{PT}=T-P=(1-0,\lambda-(-1),(1+2\lambda)-1)=(1,\lambda+1,2\lambda)$. $d(P,T)^2=|\vec{PT}|^2=1^2+(\lambda+1)^2+(2\lambda)^2=5$.

$$1+(\lambda^2+2\lambda+1)+4\lambda^2=5$$
$$1+\lambda^2+2\lambda+1+4\lambda^2=5$$
$$5\lambda^2+2\lambda+2=5$$
$$5\lambda^2+2\lambda-3=0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática para λ:

$$\lambda=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(5)(-3)}}{2(5)}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{10}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{10}=\frac{-2\pm 8}{10}.$$

Dos soluciones para λ:

$$\lambda_1=\frac{-2+8}{10}=\frac{6}{10}=3/5$$
$$\lambda_2=\frac{-2-8}{10}=\frac{-10}{10}=-1$$

Los puntos T_1 y T_2 corresponden a estos valores de λ:
Para $\lambda_1=3/5$: $T_1=(1,3/5,1+2(3/5))=(1,3/5,1+6/5)=(1,3/5,11/5)$.
Para $\lambda_2=-1$: $T_2=(1,-1,1+2(-1))=(1,-1,1-2)=(1,-1,-1)$.

El área del triángulo PT_1T_2 es $\frac{1}{2}|\vec{PT_1}\times\vec{PT_2}|$.

$$\vec{PT_1}=T_1-P=(1-0,3/5-(-1),11/5-1)=(1,8/5,6/5)$$
$$\vec{PT_2}=T_2-P=(1-0,-1-(-1),-1-1)=(1,0,-2)$$

$$\vec{PT_1}\times\vec{PT_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 8/5 & 6/5\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}$$
$$=\vec{i}(-16/5-0)-\vec{j}(-2-6/5)+\vec{k}(0-8/5)$$
$$=(-16/5,-(-10/5-6/5),-8/5)=(-16/5,-(-16/5),-8/5)=(-16/5,16/5,-8/5).$$

Módulo:

$$|\vec{PT_1}\times\vec{PT_2}|=\sqrt{(-16/5)^2+(16/5)^2+(-8/5)^2}=\sqrt{\frac{256}{25}+\frac{256}{25}+\frac{64}{25}}$$
$$=\sqrt{\frac{576}{25}}=\frac{\sqrt{576}}{5}=\frac{24}{5}.$$

Área:

$$\text{Área}(PT_1T_2)=\frac{1}{2}\times\frac{24}{5}=\frac{12}{5}ud^2$$

$$\boxed{\textbf{Área}(\boldsymbol{PT_1T_2})=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}\ \textbf{ud}^{\ 2}}$$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad y Estadística

La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8.5$ y desviación típica $\sigma = 2.5$. Se pide:

a) **Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0.05$.**
b) **Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9.3.**

Solución:

Tenemos $X \sim N(\mu = 8.5, \sigma = 2.5)$.

Estandarizamos la variable usando $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-8.5}{2.5}$, donde $Z \sim N(0,1)$.

a) **Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0.05$.**

Estandarizamos la condición:

$$P(X \leq a) = P\left(\frac{X - 8.5}{2.5} \leq \frac{a - 8.5}{2.5}\right) = P\left(Z \leq \frac{a - 8.5}{2.5}\right) = 0.05.$$

Sea $z_a = \frac{a-8.5}{2.5}$. Buscamos z_a tal que $P(Z \leq z_a) = 0.05$.
Como $0.05 < 0.5$, el valor z_a debe ser negativo. La tabla de la $N(0,1)$ proporciona probabilidades para $P(Z \leq z)$ con $z \geq 0$.
Usamos la simetría: $P(Z \leq z_a) = 0.05 \implies P(Z \geq -z_a) = 0.05$. Esto significa que $P(Z \leq -z_a) = 1 - 0.05 = 0.95$. Buscamos en la tabla de la $N(0,1)$ el valor $-z_a$ cuya probabilidad acumulada es 0.95.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	~~0,9452~~	~~0,9463~~	~~0,9474~~	~~0,9484~~	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

El valor 0.95 está entre 0.9495 ($z = 1.64$) y 0.9505 ($z = 1.65$). Interpolando, tomamos $-z_a = 1.645$. Por lo tanto, $z_a = -1.645$. Ahora despejamos a:

$$z_a = \frac{a - 8.5}{2.5} \implies -1.645 = \frac{a - 8.5}{2.5}$$

$$a - 8.5 = -1.645 \times 2.5 = -4.1125$$

$$a = 8.5 - 4.1125 = 4.3875.$$

$$\boxed{a \approx 4.3875}$$

b) **Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9.3.**

Se pide calcular $P(8 \leq X \leq 9.3)$. Estandarizamos ambos extremos:

$$Z_1 = \frac{8 - 8.5}{2.5} = \frac{-0.5}{2.5} = -0.20.$$

$$Z_2 = \frac{9.3 - 8.5}{2.5} = \frac{0.8}{2.5} = \frac{8}{25} = 0.32.$$

La probabilidad es $P(-0.20 \le Z \le 0.32)$. Usamos la propiedad $P(a \le Z \le b) = P(Z \le b) - P(Z \le a)$.

$$P(-0.20 \le Z \le 0.32) = P(Z \le 0.32) - P(Z \le -0.20).$$

Usamos la simetría para la parte negativa: $P(Z \le -0.20) = P(Z \ge 0.20) = 1 - P(Z \le 0.20)$.

$$P(-0.20 \le Z \le 0.32) = P(Z \le 0.32) - (1 - P(Z \le 0.20)) = P(Z \le 0.32) + P(Z \le 0.20) - 1.$$

Buscamos los valores en la tabla $N(0,1)$:

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

$P(Z \le 0.32) = 0.6255$. $P(Z \le 0.20) = 0.5793$. Calculamos la probabilidad:

$$P(8 \le X \le 9.3) = 0.6255 + 0.5793 - 1 = 1.2048 - 1 = 0.2048.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(8 \le X \le 9.3) = 0.2048}}$$